

공 3개로 저글링을 할 때 이차함수를 이용하여 가장 안정적인 양손의 위치를 구할 수 있을까?

1학년 3반 22번 이름 : 정취준

I. 연구의 필요성 및 목적

최근 발생한 코로나 바이러스, 즉 COVID-19로 인해 등교 수업 대신 온라인 수업으로 대체하는 학교가 많아지고 있다. 그 중 체육 과목은 온라인으로 가능한 활동들이 제한적이라서 집에서 간단하게 할 수 있는 활동들이 주로 활용되고 있다.

그 중에서 학생들이 흥미있어 하고, 많이 활용되는 온라인 활동 중 하나가 바로 저글링이다. 물론 이미 경험있는 학생들이나 운동신경이 좋은 학생들이 존재하지만, 대부분의 학생들은 평소에 저글링을 접해보지 못해 공 3개는커녕 2개로도 못하는 경우가 많다. 어떻게 하면 이 낯선 운동을 처음 접하는 학생들도 잘 할 수 있을까 생각하다가 이 문제를 과학적으로 풀어보자는 생각이 들었다. 어떻게 할지 생각해보다 던져지는 저글링 공은 물리적으로 운동하며, 그 물리적 운동은 수학적으로 예측할 수 있으며, 저글링 공은 포물선 모양으로 운동하는데, 그 경로를 이차함수의 그래프를 통해 나타낼 수 있고 양손의 위치를 x 절편으로 정해서 이차함수를 이용해 경로를 예측해서 미리 손으로 공을 받을 준비를 하면 저글링을 조금이라도 쉽게 할 수 있겠다는 생각이 들었다. 이차함수 그래프가 포물선과 관련이 있다는 것은 알고 있었지만 진짜로 실생활에 적용할 수 있을까? 라는 의문을 가지고 있었는데 이런 식으로 운동 능력을 키우는 목적으로도 쓸 수도 있다는 것을 알고 놀라웠다. 이 연구를 통해 얻은 최적의 양손의 위치를 알아두면 저글링 실력(향상)에 도움이 될 수 있을 것이다. 지금까지 없었던 저글링을 잘하는 법을 주제로 한 연구이기 때문에 새로운 결과를 얻어낼 수 있다는 점에서 다른 연구들과 차별화되어 있다.

II. 이론적 배경

먼저 저글링의 배경과 저글링을 하는데 사용되는 개념들에 대해 알아보자.

즉, 저글링에 대한 정의와 그 종류에 대해 알아보고, 저글링의 물리적 특성을 고려하여 공이 포물선을 그리는 데 필요한 수학적 개념, 그리고 공이 움직이는 포물선 상에 자리하는 손의 위치를 알기 위해 개념과 응용을 살펴보자.

1. 저글링 (Juggle)에 대한 정의와 그 종류

저글링이란 단어의 정의는 ‘신체를 이용하여 두 개 이상의 물체를 번갈아가며 던지거나 튀기면서 묘기를 부리는 활동’이다. 저글링은 볼(ball), 풋백(footbag), 데빌스틱(devil stick), 시가박스(cigar box), 링(ring), 모자 등 다양한 종류가 있다. (“두산백과”, 작성일 표기 없음)

다양한 종류의 저글링 방법과 대상들이 있지만, 최대 변수를 줄이고 가장 널리 쓰이는 종류이기 때문에 본 연구에서 활용하는 저글링의 종류는 3개의 공을 이용하는 “볼 저글링”으로 제한하기로 한다.

2. 수학적 개념

가. 포물선운동의 정의와 응용

포물선운동의 정의는 일정한 크기와 방향을 가지는 힘이 작용하는 곳에서 물체가 힘의 방향과 일정한 각도를 이루어서 던져졌을 때 그 이동 경로가 포물선을 그리는 운동이다.

지표면에서 지면과 일정한 각도를 이루어 던져진 물체는 지면에 수직인 방향으로만 일정한 크기를 가지는 중력의 영향을 받는다. 수평 방향으로는 등속도 운동을 하며 수직 방향으로는 등가속도 직선 운동을 하게 된다. 이렇게 모든 지점에서의 힘의 크기와 방향이 같은 공간에서 물체가 힘의 방향과 일정 각도를 이루어 던져질 때 이 물체는 결과적으로 포물선을 그리게 되며 이때 물체가 그리는 궤적을 포물선운동이라고 칭한다. (“두산백과”, 작성일 표기 없음)

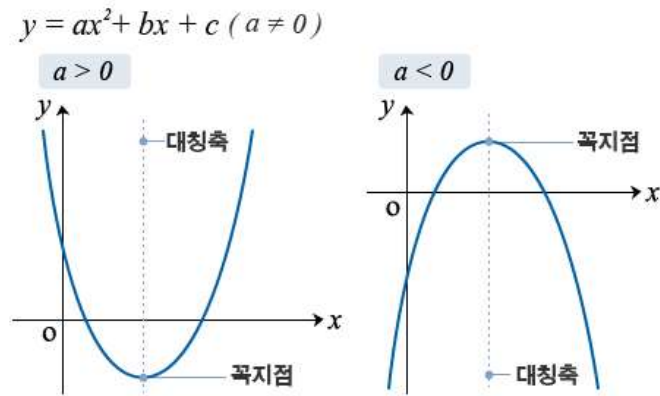


[그림 1] 포물선 운동

나. 포물선 운동 기반의 이차함수 특성과 그 응용

일반적으로 물리적 포물선 운동은 이차함수로 표현할 수 있다. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)의 해와 같다. (“두산백과”, 작성일 표기 없음)

저글링을 할 때 공의 운동 궤적은 xy 평면 위에서 y 축에 평행이며 위로 볼록한 포물선이므로 위 이차방정식에서 a 의 계수가 음수인 그래프를 활용할 수 있다.



[그림 2] 이차함수의 그래프

다. 포물선 운동 공식

$$t(\text{최고점 도달 시간}) = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$H(\text{최대 높이}) = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

$$R(\text{수평 도달 거리}) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$(g(\text{중력가속도}) = 9.8m/s^2)$$

(“두산백과”, 작성일 표기 없음)

라. x 절편

절편은 ‘일차함수 그래프가 축과 만나는 교점의 좌표로 일차함수 $y = ax + b$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)의 그래프는 기울기가 a 이고, y 축과 점 $(0, b)$ 에서 만나는 직선’이다. 이때 y 축과의 교점의 y 좌표 b 를 y 절편, x 축과 만나는 x 좌표 $-\frac{b}{a}$ 를 x 절편이라고 한다. (“두산백과”, 작성일 표기 없음)

III. 연구 방법

1. 필요한 모델링 도구 - GeoGebra

본 연구에서는 수학적 개념을 모델링하기 위해 다음과 같은 도구를 활용하였다.



[그림 3] 온라인 수학 모델링 도구 'GeoGebra'

2. 움직이는 저글링 공의 움직임에 대한 식 구하기

앞서 이론적 배경에서 다루었던 것과 같이 저글링 공의 포물선운동은 이차함수 식으로 표현할 수 있다.

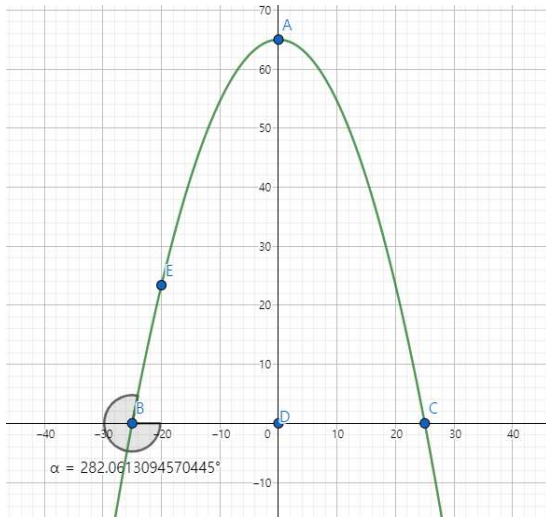
여러 사람을 대상으로 손의 위치를 측정해보려고 했지만 이 실험을 하려면 기본적으로 저글링을 어느정도 할 수 있어야 했는데 주변에서 그런 사람을 찾기 어려워 본인만 직접 실험자가 되어 다음과 같이 수학적 모델링을 하였다.

본 연구에서는 수학적 개념의 적용 편의성을 위해 저글링 시 손의 위치를 2차원 평면 상으로 제한한다. 2차원 평면 상 손의 위치를 정하기 위해 필요한 이론적 배경은 다음과 같다.

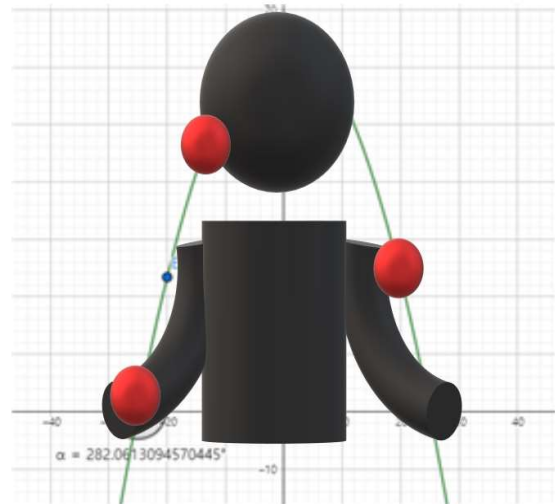
저글링을 할 때 손의 위치는 공이 포물선을 그릴 때 xy 평면에서 x 절편으로 볼 수 있다. 물론 손의 위치가 특정 y 값 상에서 움직인다고 볼 수 없지만, 수학적 개념 적용을 위해 가정하여 응용하고자 한다.

저글링을 할 때, 양팔을 몸의 바깥쪽으로 벌린 상태에서 양손 사이의 거리는 약 $60cm$, 양팔을 자연스럽게 굽힌 상태에서는 약 $50cm$, 양팔을 허리에 딱 붙힌 상태에서는 약 $40cm$ 이다. 허리의 높이에서 던지는 공의 최대 높이를 자신의 머리 바로 위까지로 가정한다면 약 $80cm$ 이고 눈높이로 가정한다면 약 $65cm$, 목 바로 아래 높이까지 던질 때는 약 $40cm$ 이다.

위에서 설명한 내용 중 양손 사이의 거리는 아래 그림과 같이 사람 손의 위치, 즉 x 절편을 나타낸다.



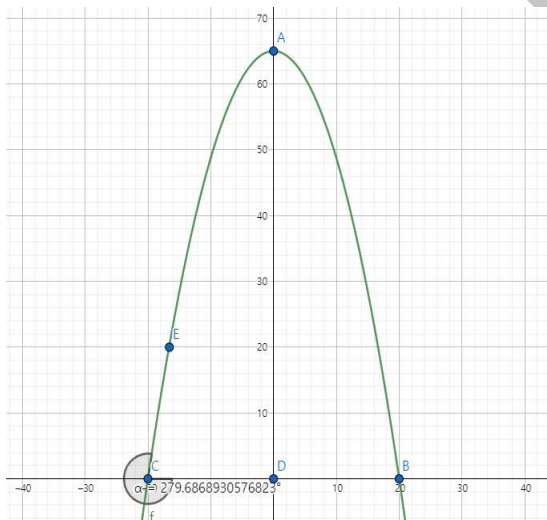
[그림 4] 이차함수로 표현한 저글링 공의 운동
(최대 높이 65cm, 간격 50cm)



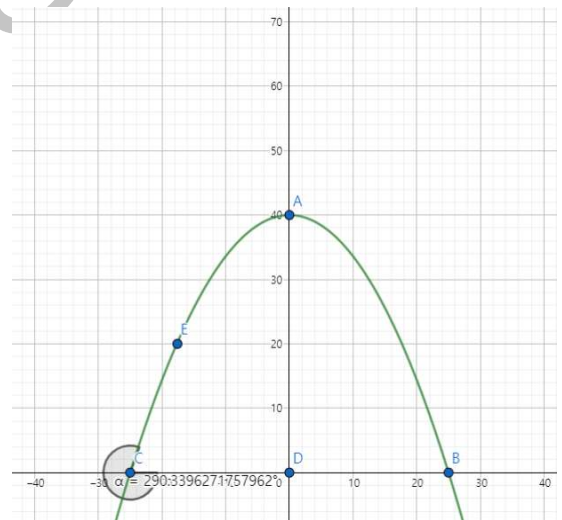
[그림 5] 저글링 공의 포물선 운동

[그림 4]와 같이 이차함수의 x 절편 $B = (-25, 0)$, $C = (25, 0)$ 를 이용하여 $y = a(x - 25)(x + 25)$ 라는 식을 만들었고 함수의 최댓값이 65cm인 점을 이용해

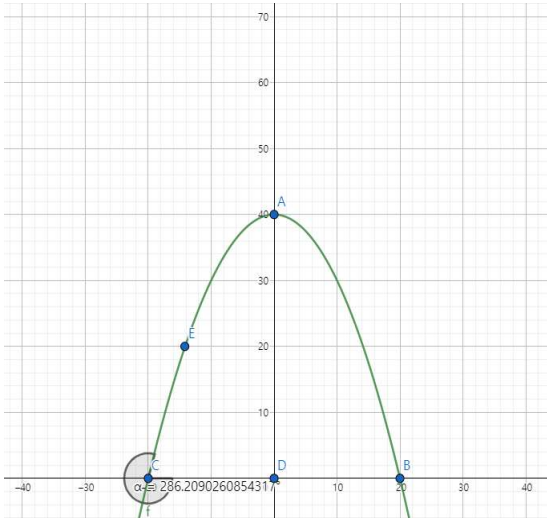
$y = -\frac{65}{625}(x - 25)(x + 25) = -\frac{13}{125}(x - 25)(x + 25)$ 라는 이차함수 식을 세웠다. (점 D, E 는 그래프의 각도를 측정하기 위해 찍은 임의의 점이다.) ‘GeoGebra’를 이용하여 공을 던지는 각도를 측정해 보았더니 약 78° 였다.



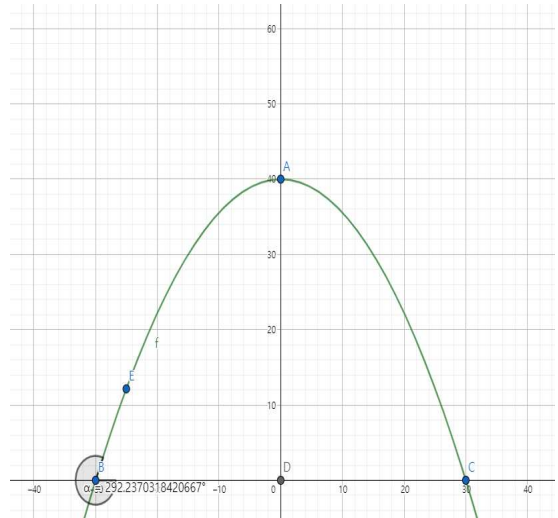
[그림 6] 이차함수로 표현한 저글링 공의 운동
(최대 높이 65cm, 간격 40cm)



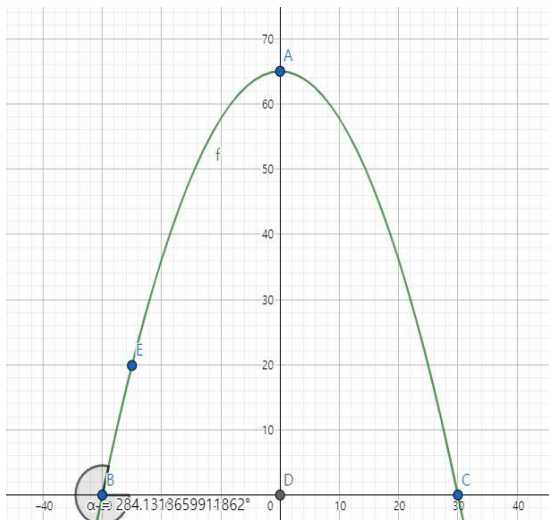
[그림 7] 이차함수로 표현한 저글링 공의 운동
(최대 높이 40cm, 간격 50cm)



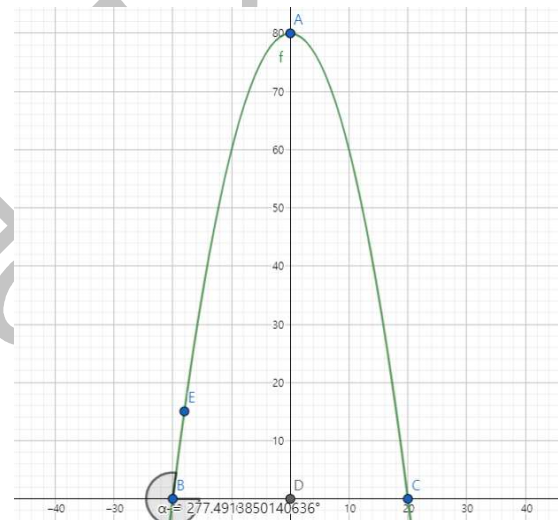
[그림 8] 이차함수로 표현한 저글링 공의 운동
(최대 높이 40cm, 간격 40cm)



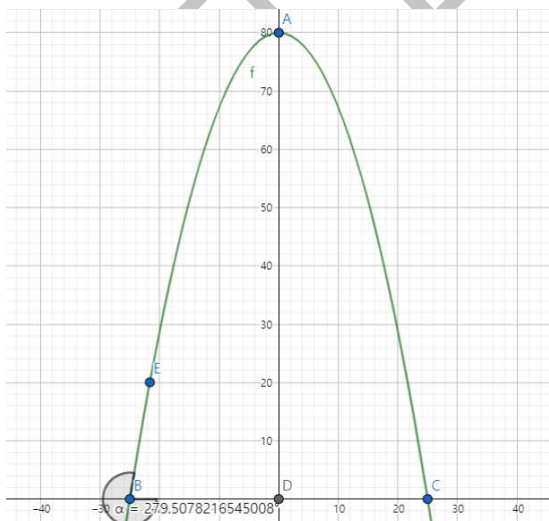
[그림 9] 이차함수로 표현한 저글링 공의 운동
(최대 높이 40cm, 간격 60cm)



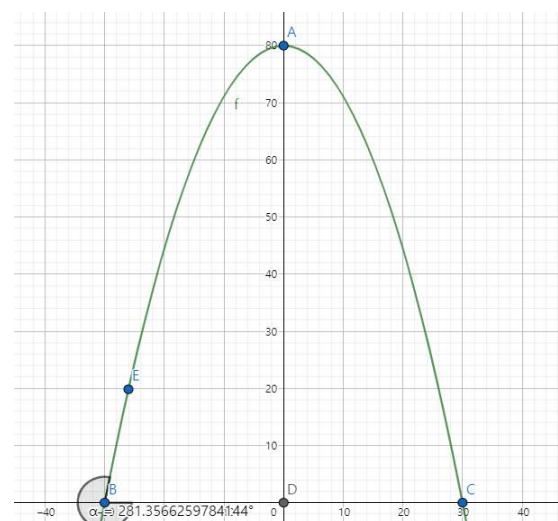
[그림 10] 이차함수로 표현한 저글링 공의 운동
(최대 높이 65cm, 간격 60cm)



[그림 11] 이차함수로 표현한 저글링 공의 운동
(최대 높이 80cm, 간격 40cm)



[그림 12] 이차함수로 표현한 저글링 공의 운동
(최대 높이 80cm, 간격 50cm)



[그림 13] 이차함수로 표현한 저글링 공의 운동
(최대 높이 80cm, 간격 60cm)

| 간격 \ 최대높이 | 40cm | 65cm | 80cm |
|-----------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 40cm | $y = -\frac{1}{10}(x-20)(x+20)$ | $y = -\frac{13}{80}(x-20)(x+20)$ | $y = -\frac{1}{5}(x-20)(x+20)$ |
| 50cm | $y = -\frac{8}{125}(x-25)(x+25)$ | $y = -\frac{13}{125}(x-25)(x+25)$ | $y = -\frac{16}{125}(x-25)(x+25)$ |
| 60cm | $y = -\frac{2}{45}(x-30)(x+30)$ | $y = -\frac{13}{180}(x-30)(x+30)$ | $y = -\frac{4}{45}(x-30)(x+30)$ |

[표 1] 저글링 공의 최대 높이와 간격 별 이차함수

[표 1]과 같이 위와 같은 방법으로 공의 최대 높이와 양손의 간격을 다르게 해서 각각 다른 함수식을 구했다.

3. 저글링 공을 던지는 최대 높이에 따른

$$\begin{cases} y = \frac{\text{최대 높이}}{(x_{\text{절편}_1} \times x_{\text{절편}_2})}(x + x_{\text{절편}_1})(x - x_{\text{절편}_2}) \\ y = 0 \end{cases}$$

IV. 연구 결과

앞의 연구 방법을 통해 물리적 운동을 하는 저글링 공과 손의 위치를 수학적으로 모델링할 수 있었다. 본 연구에서는 연구자가 직접 저글링 실험을 통해 다음과 같이 결과를 얻었다.

1. 포물선 운동을 하는 저글링 공의 이차 함수식 표현

본 연구에서 저글링 공의 궤도는 연구 방법에서 구체적으로 실험했던 [표 1]의 식과 같이 나타낼 수 있었다.

$$y = -\frac{\text{최대 높이}}{x_{\text{절편}_1} \times x_{\text{절편}_2}}(x + x_{\text{절편}_1})(x - x_{\text{절편}_2}) \text{ 이라고 나타낼 수 있다.}$$

2. 저글링 공의 이차함수 그래프의 각도와 포물선운동 시간

연구 중, 손이 공을 잡으러 나가는 타이밍도 중요하겠다는 생각이 들어서 아직 배우지는 않았지만 포물선 운동 공식을 이용하고 공식에서 필요한 각도는 'GeoGebra'를 이용하여 이차함수 그래프 상에 공을 던져 올리는 각도를 측정(표 2)해보았다.

포물선 공식 중 최고점 높이 공식인 $H = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$ 에서 저글링 공 이차함수 곡선의 최댓값을 H 에 넣어

$(v_0 \sin \theta)^2$ 값을 계산하고 $v_0 \sin \theta$ 의 값을 구한 다음, 최고점 도달 시간 공식 $t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ 를 이용한 t 값의 두 배를 저글링 공이 운동하는 시간으로 계산하였다. 즉 저글링 공을 던지고 다른 손에 도달하는 시간을 $2t$ 로 보았다.

| (최대 높이, 간격) | 각도 | 시간 |
|--------------|-------|----------|
| (40cm, 40cm) | 약 74° | 0.57 sec |
| (40cm, 50cm) | 약 70° | |
| (40cm, 60cm) | 약 68° | |
| (65cm, 40cm) | 약 80° | 0.72 sec |
| (65cm, 50cm) | 약 78° | |
| (65cm, 60cm) | 약 76° | |
| (80cm, 40cm) | 약 83° | 0.8 sec |
| (80cm, 50cm) | 약 81° | |
| (80cm, 60cm) | 약 79° | |

[표 2] 공의 최대 높이와 양손의 간격 별 그래프의 각도(공을 던지는 각도)와 포물선운동 시간

공식을 이용하여 계산한 결과, 최대 높이가 같으면 운동 시간도 같으며, 간격을 넓히면 각도는 낮아져야 한다. 사실 각도를 측정한 이유는 포물선운동 공식에 이용하려는 목적이었는데 최대 높이를 알고 있었으므로 θ (공을 던져 올린 각도)값과 v_0 (공을 던진 속도)값을 구하지 않고도 최고점 도달시간 t 를 계산할 수 있었다. 던져 올린 각도는 저글링 공의 운동 시간에 전혀 영향을 미치지 않았다.

정리하자면, 최대 높이에 따라 저글링 공의 운동 시간은 달라지며 공을 던지는 각도에 따라 간격, 즉 손의 위치는 달라져야 한다. 그리고 손의 위치와는 별개로, 공을 눈높이까지 던져 올린다고 가정했을 경우 공을 던지는 각도는 약 78°, 저글링 공 하나가 손에 떨어지는 시간은 0.72 sec. 저글링을 할 때에는 리듬이 필요한데 공이 운동하는 시간인 0.72 sec를 하나-둘-셋 박자로 나눠서 공을 던지고 받고 하는 동작을 하는 타이밍으로 잡는다면 저글링이 좀 더 쉽고 정확할 것이다.

그리고, 저글링 공을 던지고 다시 잡기 위한 손의 위치를 선정하는 데 필요한 시간 또한 중요하기 때문에 손 움직임에 대한 타이밍도 고려해야 한다.

V. 결론 및 제언

1. 결론

본 연구에서는 양손의 위치(40cm, 50cm, 60cm)와 저글링 공의 최대 높이(40cm, 65cm, 80cm)별로 공을 던지는 각도와 한쪽 손에서 다른 쪽 손까지 갈 때 걸리는 시간을 구해보았다.

팔을 높이거나 간격을 넓히면 공을 던지는 각도는 낮아져야 하고, 팔을 낮추거나 간격을 좁히면 공을 던지는 각도는 높아져야 한다는 것, 최대 높이가 같으면 팔의 간격에 관계없이 다른 쪽 손에 도달하는 시간은 같다는 것을 알게 되었다.

저글링을 잘하기 위해서는 최대 높이와 양팔 간격은 물론 손이 공을 잡으러 나가는 타이밍도 중요하다는 것을 알게 되었다.

[표 2]에 정리되어 있듯이 저글링 공이 한쪽 손에서 다른 쪽 손까지 도달하는 데까지 걸리는 시간을 이용해 손이 공을 잡으러 나가는 타이밍을 미리 정해두면 저글링을 하는 데에 도움이 될 것 같다.

2. 제언

본 연구를 하기 위해 저글링 공의 운동을 나타내기 위한 함수를 만들어 보고 'GeoGebra' 사이트를 이용해 이차함수 그래프를 그려봤다. 아직은 배우지 않은 개념인 포물선운동에 대한 수학적 공식을 알아봤는데 이 포물선운동을 물리 시간에 더 자세하게 배우면 더 재미있어질 것 같다.

공을 던지는 속도를 다르게 했을 때 결과가 어떻게 달라질지 포물선운동을 배우고 나서 더 알아보고 싶다.

손의 위치를 2차원 평면으로 제한하여 수학적 모델링을 했는데 앞으로 3차원 모델링에 대해 공부할 기회가 있었으면 한다.

연구자 본인만 실험자로 참여했는데, 타 실험자들도 참여하여 저글링 실력향상에 도움이 되는지 여부를 판단할 수 있었으면 하는 아쉬움이 있었다. 또, 본인의 신체만을 기준으로 했기 때문에 '많은 다른 학생들이 저글링을 좀 더 잘 할 수 있게 하기 위해' 라는 연구 목적에 맞지 않는다는 한계점이 있다. 실험자가 좀 더 많고, 체격이 다양했으면 더 좋은 결과를 얻을 수 있었을 것이다.

사람의 몸은 기계가 아니기 때문에 이론과 똑같이 몸이 움직이지는 않겠지만 이런 연구를 통하여 수학적, 물리적으로 저글링 공의 포물선운동을 표현해 보았다는 경험은 앞으로도 저글링을 할 때 작게나마 도움이 될 것 같다.

참 고 문 헌

손정우, 이봉우, 문홍주, 박승호, 이세연, 전병희 (2015). 고등학교 물리학 II 교과서. 비상

GeoGebra 사이트

URL :

<https://www.geogebra.org/>

“이차함수” (작성일 표기 없음), 두산백과. 검색일 : 2021.5.2.

URL :

https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000856443

“저글링” (작성일 표기 없음), 두산백과. 검색일 : 2021.5.1.

URL :

https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=200214001623973

“절편” (작성일 표기 없음), 두산백과. 검색일 : 2021.5.2.

URL :

https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000712328

“포물선운동” (작성일 표기 없음), 두산백과. 검색일 : 2021.6.12.

URL :

https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000907419